КАЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И РАЗРЫВ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Трофимов С.П., Иванов А.В.[1]

[1]Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-97-59, e-mail: tsp61@mail.ru

Аннотация — Рассматривается модель ограничений геометрического объекта, задаваемая допустимым множеством полубесконечной задачи линейного программирования (ПбЛП). Предлагается качественный геометрический способ анализа соотношений двойственности ПбЛП, основанный на использовании конической оболочки коэффициентов системы ограничений. Устанавливается связь наличия разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. На примере ПбЛП с тремя переменными показывается, что задачи с разрывом двойственности не являются экзотическими. Обсуждается возможность применения системы MATLAB для численного анализа качества ограничений геометрических объектов. Выдвигается гипотеза об отрицательном влиянии разрыва двойственности задачи ПбЛП на качество ограничений геометрических объектов.

THE QUALITY OF GEOMETRIC OBJECTS CONSTRAINTS AND THE DUALITY GAP IN SEMI-INFINITE LINEAR PROGRAMMING

Trofimov S.P., Ivanov A.V.[1]

[1] Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-97-59, e-mail: tsp61@mail.ru

Abstract — The paper considers the model of geometric object constraints defined by feasible set of semi-infinite linear programming problem (SILP). Quality geometric method for analyzing SILP duality relations based on the use of the conical hull of the system constraints coefficients is proposed. A relation between presence of the duality gap and nonclosure of the conical hull boundary of points in a multidimensional space is established. An SILP example with three variables illustrates that problems with the duality gap are not exotic. The possibility of applying the system MATLAB for numerical quality analysis of geometrical objects constraints is under discussion. We put forward a hypothesis that the duality gap of SILP adversely affects on the quality of geometric objects constraints

.

I. Введение

Задача полубесконечного линейного программирования (ПбЛП) является важным объектом исследования в теории оптимизации. Задача обычно изучается с двух точек зрения.

Численные, количественные методы предполагают задание бесконечного множества ограничений с помощью параметров. В дальнейшем бесконечная система аппроксимируется конечной подсистемой и решается симплексными методами.

Качественные методы используют свойства топологических пространств, а также строят выпуклые и конические оболочки точек, составленных из коэффициентов системы. При этом задача построения выпуклой оболочки не рассматривается.

Одной из важных целей изучения задачи ПбЛП является проверка соотношения двойственности, то есть равенства оптимальных значений исходной и двойственной задач ЛП. Возникновение разрыва двойственности означает резкое ухудшение свойств численных методов решения этой задачи. Таким образом, задача ПбЛП с разрывом двойственности, обычно, рассматривается как нежелательная и экзотическая.

В данной работе мы показываем важность исследования таких задач и связываем наличие разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. Размерность этого пространства на единицу больше количества переменных задачи. С помощью пары двойственных задач ПбЛП с разрывом двойственности осуществляется анализ структуры этой незамкнутой границы.

II. Геометрический подход к анализу соотношений двойственности

Введем модель ограничений геометрического объекта

$$M = \{x\colon Ax \geq b\} \qquad (1)$$

где A – полубесконечная матрица, строки которой $a_\alpha \in R^n$, $\alpha \in \Omega$, Ω – некоторое счетное множество индексов, $b = (b_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ – вектор-столбец из пространства R^Ω.

Множество (1) может рассматриваться как аппроксимация ... и является множеством допустимых решений полубесконечной задачи линейного программирования

$$\upsilon = \inf \{ (x, c) : x \in M \}, \qquad (2)$$

где $c \in R^n$ – вектор градиента целевой функции, υ – оптимальное значение задачи.

Наряду с задачей(1) рассмотрим двойственную к ней задачу ПбЛП с конечным числом ограничений и бесконечным числом переменных

$$\upsilon^* = \sup \{ (u, b) : A^T u = c, u \geq 0, u \in f \}, \qquad (3)$$

где f – подпространство последовательностей из R^Ω, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля, υ^* – оптимальное значение двойственной задачи.

Задачи (2) и (3) достаточно универсальны и изучаются во многих работах. В основном исследуются условия, при которых выполняется соотношение двойственности

$$\upsilon = \upsilon^*. \tag{4}$$

В [1] показано, в частности, что если $c \in \text{int}\,(\,\text{cone}\{\, a_\alpha,\ \alpha \in \Omega\ \}\,)$, то равенство (4) имеет место. В [2, 3] в качестве достаточного условия для (4) требуется выполнение условия Слейтера для системы ограничений задачи (2) и замкнутость конической оболочки множества

$$K = \text{cone}\ \{\ [a_\alpha;\ b_\alpha] : \alpha \in \Omega\ \}.$$

Здесь и далее запись $[a_\alpha;\ b_\alpha]$ означает присоединение числа b_α к вектору строке a_α.

В [4] для задачи (2) вводится понятие равномерной двойственности, при котором для каждого $c \in R^n$ должен иметь место один из следующих случаев:

1) $\upsilon = -\infty$, $\upsilon^* = -\infty$;
2) $\upsilon = +\infty$, $\upsilon^* = +\infty$;
3) $\upsilon = +\infty$, $\upsilon^* = -\infty$;
4) υ конечно, задача (3) разрешима и $\upsilon = \upsilon^*$.

Необходимым и достаточным условием равномерной двойственности при $\upsilon < +\infty$ является замкнутость конуса

$$K\!\downarrow\ = \text{cone}\ \{\{\ [a_\alpha;\ b_\alpha],\ \alpha \in \Omega\ \},\ [0;\ -1]\ \}.$$

В настоящей работе предлагается критерий, связывающий равенство (4) со свойствами некоторого промежутка. Фактически этот критерий позволяет взглянуть на задачи (2) и (3) с некоторой единой геометрической точки зрения.

Введем обозначения

$$K\!\uparrow\ = \text{cone}\ \{\{\ [a_\alpha;\ b_\alpha],\ \alpha \in \Omega\ \},\ [0;\ 1]\ \},$$

$$P = \{\ [c;\ r] : r \in R\ \}.$$

Из геометрических соотношений между конусом *K* и прямой *P* можно получить ряд важных свойств задач (5) и (6). Возможны следующие случаи взаимного расположения *K* и *P*:

$$\overline{K} \cap P = \varnothing, \tag{5}$$

$$K \cap P = \varnothing,\ \overline{K} \cap P \neq \varnothing, \tag{6}$$

$$K \cap P \neq \varnothing. \tag{7}$$

Для каждого из случаев (5)-(7) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если выполняется (5), то

1) $\upsilon = +\infty$, $\upsilon^* = -\infty$, если $M = \varnothing$;
2) $\upsilon = -\infty$, $\upsilon^* = -\infty$, если $M \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\overline{K} \cap P = \varnothing$.

Тогда $K \cap P = \varnothing$, поэтому ограничения задачи (2) несовместны и, следовательно, $\upsilon^* = -\infty$.

Допустим система $Ax \geq b$ несовместна. Тогда, очевидно, $\upsilon = +\infty$.

Допустим, система $Ax \geq b$ совместна. Известно [3], что неравенство $(x, c) \geq r$ является следствием совместной системы $Ax \geq b$ тогда и только тогда, когда $[c, r] \in \overline{K}$. Допустим, для некоторого r_0 неравенство $(x, c) \geq r_0$ является следствием системы $Ax \geq b$. Тогда $r_0 \in \overline{K} \cap P = \varnothing$, что невозможно. Поэтому для любого r неравенство $(x, c) \geq r$ не может являться следствием совместной системы $Ax \geq b$. Отсюда $\upsilon = -\infty$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Если выполняется (6), то

$$\upsilon = \sup\{\, r : [c;\ r] \in \overline{K}\ \},\ \upsilon^* = -\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим через r_0 правую часть равенства (6).

Так как $\overline{K} \cap P \neq \varnothing$, то $r_0 > -\infty$.

Если $r_0 = +\infty$, то для любого достаточно большого r выполняется $[c;\ r] \in \overline{K}$, т.е. $(x, c) \geq r$ является неравенством-следствием системы $Ax \geq b$. Для совместной системы $Ax \geq b$ это невозможно. Поэтому система $Ax \geq b$ несовместна, откуда $\upsilon = r_0 = +\infty$.

Пусть теперь r_0 конечно.

Докажем, что система $Ax \geq b$ совместна. Допустим, что это не так. Тогда из [3] получаем $[0;\ 1] \in \overline{K}$. Так как $\overline{K} \cap P \neq \varnothing$, то при некотором r_1 имеем $[c;\ r_1] \in \overline{K}$. Тогда для любого $s > r_1$ имеем

$$[c;\ s] = (s - r_1)\cdot[0;\ 1] + [c;\ r_1] \in \overline{K}.$$

Отсюда вытекает $r_0 = +\infty$, что противоречит конечности r_0. Таким образом, система $Ax \geq b$ совместна.

Возьмем произвольное r_1, при котором $[c;\ r_1] \in \overline{K}$. Неравенство $(x, c) \geq r_1$ является следствием совместной системы $Ax \geq b$. Поэтому $\upsilon \geq r_1$, откуда

$$\upsilon \geq \sup\ \{\ r : [c;\ r] \in \overline{K} \cap P\ \} = r_0\,.$$

С другой стороны, так как $(x, c) \geq \upsilon$ является следствием совместной системы $Ax \geq b$ 2-го рода [5], то $[c;\ \upsilon] \in \overline{K}$, откуда $\upsilon \leq r_0$. Таким образом, $\upsilon = r_0$.

Вторая часть утверждения 2 вытекает из равенства $K \cap P = \varnothing$. В этом случае система ограничений задачи (3) несовместна, откуда $\upsilon^* = -\infty$. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Если выполняется (7), то

$$\upsilon = \sup\ \{\ r : [c;\ r] \in \overline{K}\ \},$$

$$\upsilon^* = \sup\ \{\ r : [c;\ r] \in K\ \}.$$

Доказательство. Первая часть утверждения совпадает с (8).

Обозначим $r_0 = \sup\{ r: [c; r] \in K \}$. Тогда существует последовательность $\{r_j\}$ такая, что $\lim_{j\to\infty} r_j = r_0$ и $[c; r_j] \in K$. Отсюда каждый вектор $[c; r_j]$ можно представить как конечную положительную линейную комбинацию элементов множества $\{[a_\alpha; b_\alpha], \alpha \in \Omega\}$. Коэффициенты этих комбинаций являются допустимыми решениями двойственной задачи (3) со значениями целевой функции r_j. Следовательно, $\upsilon^* \geq r_0$.

Обратно, так как $K \cap P \neq \emptyset$, то система ограничений задачи (3) совместна. Тогда существует последовательность $\{u^i\}$ допустимых решений задачи (3), такая что $\lim_{i\to\infty}(b, u^i) = \upsilon^*$. Поэтому для каждого натурального i имеем $[c; (b, u^i)] \in K$, откуда $r_0 \geq \upsilon^*$.

Итак, $r_0 = \upsilon^*$. Утверждение 3 доказано.

Построим с помощью конуса K и прямой P одномерный интервал S, который назовем характеристическим интервалом задачи ПбЛП. С учетом утверждения 4 определим интервал S следующим образом

$$S = [\sup\{ r : [c; r] \in K \}, \sup\{ r : [c; r] \in \overline{K} \}]. \tag{9}$$

Интервал S, если оно не пусто, представляет собой точку, отрезок, луч или всю прямую P и расположено в пространстве R^{n+1}. Интервал S не вырождается в точку, то оно содержится на границе замыкания конуса K, но не содержится в самом конусе. В этом случае конус K не является замкнутым. Таким образом, интервал S содержится в незамкнутой части границы конуса K.

Интервал S позволяет определить оптимальные значения пары двойственных задач (2) и (3) и, следовательно, наличие разрыва двойственности.

Теорема 1. Для характеристического интервала S имеют место равенства

$$\upsilon = \sup\{ r : [c; r] \in S \}, \tag{10}$$

$$\upsilon^* = \inf\{ r : [c; r] \in S \}. \tag{11}$$

Доказательство. Теорема вытекает из определения интервала S и утверждений 2 и 3.

Следствие 1. (Критерий разрыва двойственности). Пусть $\upsilon^* > -\infty$. У пары задач (2) и (3) существует разрыв двойственности тогда и только тогда, когда множество S имеет непустую внутренность.

Из вышесказанного следует, что конус K, прямая P и, вообще говоря, направление прямой P определяют оптимальные значения задач (2) и (3).

Исследуем вопрос о разрешимости двойственной задачи. Двойственная задача (3) достигает свое значения тогда и только тогда, когда супремум в утверждении 3 достигается.

Так как при переходе от множества $\{[a_\alpha; b_\alpha], \alpha \in \Omega\}$ к конусу K ограничения задачи (2) теряют свою индивидуальность, то восстановить оптимальное решение задачи (3), вообще говоря, невозможно.

Рассмотрим разрешимость исходной задачи. Известно, что в случае совместности системы ограничений задачи (2) функция оптимума $\upsilon(c)$ является собственной, вогнутой и по утверждению 3 $\upsilon(c) = \sup\{ r : [c; r] \in \overline{K} \}$. Следствие 23.5.3 [6] утверждает, что субдифференциал $\partial\upsilon(c)$ представляет собой всё множество оптимальных решений задачи (2). Из геометрического смысла субдифференциала получаем

Утверждение 4. Задача (2) имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда через точку $[c; \upsilon(c)]$ можно провести гиперплоскость такую, что ее подграфик содержит конус $\overline{K}$.

III. Противоположные задачи линейного программирования

Заменим в исходной задаче (2) критерий и знаки неравенств в системе ограничений на противоположные. Полученную задачу назовем противоположной задачей ЛП [8]

$$\upsilon' = \sup\{ (x, c) : Ax \leq b \}. \tag{12}$$

Двойственной к (12) является задача

$$\upsilon'^* = \inf\{ (b, u) : A^T u = c, u \geq 0 \}. \tag{13}$$

Повторное применение процедуры построения противоположной задачи возвращает нас к исходной задаче (2). Таким образом, пара противоположных задач и пара двойственных задач ЛП обладают одним и тем же свойством взаимной обратимости.

Найдем υ'. Используем известное правило замены критериев при оптимизации произвольной функции $f(x)$:

$$\sup f(x) = -\inf(-f(x)).$$

Тогда $\upsilon' = -\inf\{ (x, -c) : -Ax \geq -b\}$. Используя утверждение 3, продолжаем

$$\upsilon' = -\sup\{ r : [-c; r] \in -\overline{K} \} =$$
$$= -(-\inf\{ -r : [-c; r] \in -\overline{K} \}) =$$
$$= \inf\{ -r : [-c; r] \in -\overline{K} \}.$$

Сделаем замену $t = -r$. Получаем

$$\upsilon' = \inf\{ t : [-c; -t] \in -\overline{K} \} =$$
$$= \inf\{ t : [c; t] \in \overline{K} \}.$$

Аналогично получаем

$$\upsilon'^* = \inf\{ t : [c; t] \in K \},$$
$$\upsilon^* = \sup\{ t : [c; t] \in K \},$$
$$\upsilon'^* \leq \upsilon^*.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Для противоположной системы выполняются соотношения

$$\upsilon' = \inf\{ t : [c; t] \in \overline{K} \},$$
$$\upsilon'^* = \inf\{ t : [c; t] \in K \}.$$

При этом справедливо тройное неравенство

$$\upsilon \geq \upsilon^* \geq \upsilon'^* \geq \upsilon'. \tag{14}$$

Относительно ограничений противоположной задачи можно высказать следующие утверждения.

Утверждение 5. Если $M = \{ x : Ax \geq b \}$ – непустое, ограниченное множество, не состоящее из одной точки, то $M' = \{ x : Ax \leq b \} = \varnothing$.

Доказательство. Допустим противное: $Ax_0 \leq b$ при некотором x_0. Тогда для любого x из $Ax \geq b$ вытекает $A(x - x_0) \geq 0$. Отсюда для любого $\lambda \geq 0$

$$A(x + \lambda(x - x_0)) = Ax + \lambda A(x - x_0) \geq b. \quad (15)$$

Так как $\{ x : Ax \geq b \}$ ограничено, то из (15) получаем $x = x_0$, то есть $\{ x : Ax \geq b\} = \{x_0\}$, что противоречит условию.

Утверждение 6. Пусть $M = \{ x : Ax \geq b \}$ неограничено. Если множество $M' = \{ x : Ax \leq b \}$ непустое, то оно неограничено.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$. Из неограниченности M вытекает, что найдется ненулевой вектор e такой, что для любого $t \geq 0$ выполняется $x_0 + te \in M$, то есть $A(x_0 + te) \geq b$. С учетом $Ax_0 \geq b$ получаем $Ae \geq 0$. Допустим $x' \in M'$. Тогда $A(x' - te) \leq b$, то есть множество M' неограничено.

Из утверждений 5 и 6 следует, что противоположная задача может оказаться полезной именно при наличии конечного разрыва двойственности для задач (2) и (3), так как этот разрыв существует только тогда, когда $\{ x : Ax \geq b \}$ неограничено.

IV. Примеры

Рассмотрим примеры.

Пример 1. В следующем примере исходная и противоположная задачи имеют конечные разрывы двойственности.

$$\inf x_2$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 1, \\ x_2 \geq 2, \\ (1/n)x_1 + x_2 \geq 0, \\ (1/n)x_1 + x_2 \geq 3, (n = 1, 2, ...) \end{cases}$$

Для рассматриваемой системы конус K натянут на следующие точки $C = [0, 1; 1]$, $B = [0, 1; 2]$, $D^n = [1/n, 1; 0]$, $A^n = [1/n, 1; 3]$ (см рис. 1).

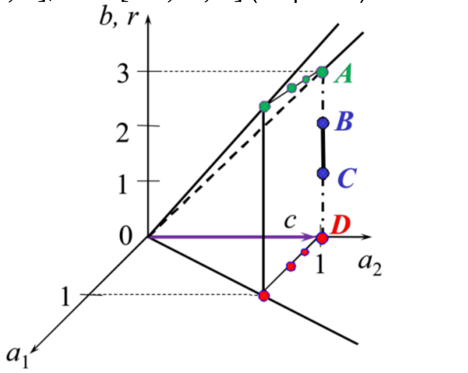

Рис.1. Трехмерный конус *K* с незамкнутой границей

Конус K не замкнут и содержится в пространстве R^3. Последовательность $\{A^n\}$ сходится к точке $A = [0, 1; 3]$, $\{D^n\}$ сходится к точке $D = [0, 1; 0]$, причем точки A и D лежат на незамкнутой границе конуса K. Целевой вектор $c = [0, 1; 0]$. Прямая P проходит через точки A, B, C и D. Отрезок $[A, B]$ является характеристическим для исходной задачи, а отрезок $[C, D]$ является характеристическим для противоположной задачи. Используя теорему 2, получаем

$$\upsilon = 3, \upsilon^* = 2, \upsilon'^* = 1, \upsilon' = 0.$$

Пример 2. Приведем пример задачи ЛП с тремя переменными, для которой разрыв двойственности выполняется для неколлинеарных целевых векторов. Система ограничений задачи имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ (1 - 1/n)x_1 + x_2 + (1/n)x_3 \geq 2, \\ (1 - 1/n)x_1 - x_2 + (1/n)x_3 \geq 2, n = (2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Конус K натянут на следующие точки: $A^n = [1 - 1/n, 1, 1/n; 2]$, $B^n = [1 - 1/n, -1, 1/n; 2]$, $C = [1, 1, 0; 1]$, $D = [1, -1, 0; 1]$.

Последовательность $\{A^n\}$ сходится к точке $A = [1, 1, 0; 2]$, $\{B^n\}$ сходится к точке $B = [1, -1, 0; 2]$.

Рассмотрим трехмерную гиперплоскость

$$H : ([a; b], d) = 0,$$

где $d = [0, 0, 1; 0]$.Точки A, B, C, D, а также вектор h лежат в гиперплоскости H, а точки A^n и B^n в полуплоскости $([a; b], d) > 0$. Поэтому точки A и B принадлежат замыканию конуса K, но не самому K, то есть лежат на незамкнутой границе конуса K.

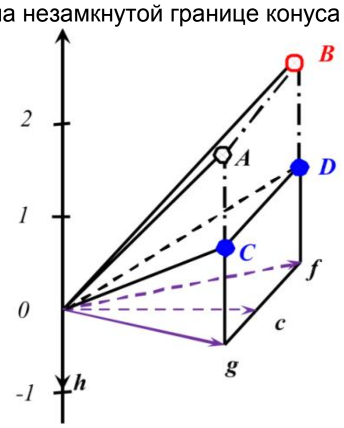

Рис.2. Трехмерное сечение четырехмерного конуса *K* трехмерной гиперплоскостью

Построим сечение $K^1 = K \cap H$ (см. рис. 2). Возьмем два целевых вектора $g = [1, 1, 0; 0]$ и $f = [1, -1, 0; 0]$. Векторы g, f линейно независимы и принадлежат конусу K^1. Возьмем вектор c, как произвольную линейную комбинацию этих векторов

$$c = \alpha\cdot g + (1 - \alpha)\cdot f,\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Для целевого вектора c по утверждению 3 имеем

1. $\upsilon = \sup \{\ r : [c; r] \in \overline{K}\ \} = 2$ и супремум достигается в точке $\alpha\cdot A + (1 - \alpha)\cdot B$,
2. $\upsilon^* = \sup \{\ r : [c; r] \in K\ \} = 1$ и супремум достигается в точке $\alpha\cdot C + (1 - \alpha)\cdot D$.

V. Применение MATLAB для численного анализа соотношений двойственности

Численный анализ соотношений двойственности (19) может быть проведен в системе компьютерной математики MATLAB с использованием оптимизационных функций *fseminf* и *linprog*, предназначенных для приближенного решения конечномерных линейных и полубесконечных нелинейных задач оптимизации соответственно. Функция *fseminf* может быть использована для нахождения оптимальных значений υ и υ' задач (2), (12), а *linprog* – для нахождения оптимальных значений υ^* и υ'^* задач (3), (13).

Рассмотрим MATLAB-программу для численного решения примера 2.

Для решения задач (2), (12) с помощью *fseminf* предварительно создаются три *m*-файла: первый (*objfun.m*) – для вычислений целевой функции, второй (*confun1.m*) – для вычислений левых частей полубесконечных ограничений задачи (2), третий (*confun1.m*) – для вычислений левых частей полубесконечных ограничений задачи (2).

m-функция *objfun.m*

```
function f = objfun(x, c)
f = c' * x;
```

m-функция *confun1.m*

```
function [c, ceq, An, Bn, s] = confun(x, s)
% Начальный интервал дискретизации
if isnan( s(1,1) ),
     s = [1 0; 1 0];
end
% Набор дискретных значений аргумента
n = 2 : s(1,1) : 10000;
% Полубесконечные ограничения вида Kn <= 0
An = -(1-1./n). * x(1)  - x(2) - (1./n). * x(3) + 2;
Bn = -(1-1./n). * x(1) + x(2) - (1./n). * x(3) + 2;
c = []; ceq = [];
```

m-функция *confun2.m*

```
function [c, ceq, An, Bn, s] = confun(x, s)
% Начальный интервал дискретизации
if isnan( s(1,1) ),
     s = [1 0; 1 0];
end
% Набор дискретных значений аргумента
n = 2 : s(1,1) : 10000;
% Полубесконечные ограничения вида Kn <= 0
An = (1-1./n). * x(1)  + x(2) + (1./n). * x(3) - 2;
Bn = (1-1./n). * x(1)   - x(2) + (1./n). * x(3) - 2;
c = []; ceq = [];
```

m-скрипт *example.m*

```
          V_arr = [];
          options = optimset('Simplex','on','LargeScale','off');
          for alpha = 0:0.1:1
                    % Целевой вектор
                    c = [1; 2*alpha - 1; 0];
   % Матрица и вектор ограничений, не содержащих n
                    A = [1 1 0; 1 -1 0];
                    b = [1; 1];
% Вектор для хранения оптимального решения
задач (2), (3), (12), (13)
                    V=zeros(1,4);
                    % Начальное приближение
                    x0 = [2;0;0];
                    f = @(x)objfun(x, c);
                    % Решение задачи (2): inf{(x, c) : Ax >= b}
                    [x, v] = fseminf(f, x0, 2, @confun, -A, -b);
                    V(1) = v;
% Решение задачи (12):
% sup{(x, c) : Ax <= b} = -inf{(x, -c) : Ax <= b}
                    f = @(x)objfun(x, -c);
                    x0 = [1;0;0];
                    [x, v] = fseminf(f, x0, 2, @confun2, A, b);
                    V(4) = -v;
% Лимитирование количества ограничений,
% содержащих параметр n
                    n = 10000;
% Дополнение матрицы A и вектора b
% полубесконечными ограничениями
                    for i = 2 : n
                              A = [A; 1-1/i 1 1/i; 1-1/i -1 1/i];
                    b = [b; 2; 2];
                    end
% Решение задачи (3):
% sup{(b, u) : A'u = c, u >= 0} =
% = -inf{(-b, u) : A'u = c, u >= 0}
                    [u, v] = linprog(-b', [], [], A', c,
zeros(size(b,1), 1), [], [], options);
                    V(2) = -v;
% Решение задачи (13): inf{(b, u) : A'u = c, u >= 0}
                    [u, v] = linprog(b',[],[],A', c, zeros(size(b,1),
1), [], [], options);
                    V(3) = v;
% Сохранение соотношений двойственности (14)
% для очередного alpha
                    V_arr = [V_arr, V'];
          end
          % Построение графика
          plot([0:0.1:1],V_arr);
```

На рис. 3 изображен результат запуска *m*-скрипта *example.m* с последующим оформлением полученного графика в интерактивном режиме.

Из рис. 3 видно, что практически при всех α $\upsilon = 2,\ \upsilon^* = 1,\ \upsilon' = 1,\ \upsilon'^* = 1$.

Особенностью приведенной MATLAB-программы является указание конечного значения n в полубесконечных ограничениях исходной задачи, что приводит к замене задачи ПбЛП задачей ЛП с конечным числом ограничений. Стоит отметить, что данная замена может привести к изменению оптимального значения обеих задач. В перспективе предполагается разработка новой MATLAB-программы с возможностью для пользователей указания бесконечной последовательности ограничений.

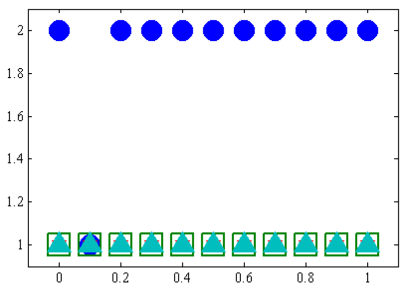

Рис. 3. Значения υ (●), υ^* (□), υ' (∇), υ'^*(▲) при $\{\alpha \mid \alpha = 0.1k, 0 \le k \le 10\}$

VI. Разрыв двойственности и качество распознавания геометрического объекта

При распознавании геометрического объекта возможны два варианта:

– задание объекта в виде выпуклой оболочки;

– функциональное задание объекта в виде выпуклого или невыпуклого нелинейного неравенства.

Оценка качества распознаваемого объекта в последнем случае определяется существованием разрыва двойственности на некоторых направлениях.

Если объект неограничен, то мы имеем дело с классической задачей выпуклого нелинейного программирования с разрывом двойственности.

Если объект ограничен, то качество распознавания определяется порядком малости функции оптимума $v(\varepsilon)$ при малых возмущениях ε.

Если порядки малости для всех направлений одинаковы, то качество распознавания хорошее.

VII. Заключение

В работе продемонстрирован геометрический подход к анализу полубесконечных задач ЛП. Данный подход позволяет моделировать задачи с заданными свойствами разрыва двойственности. Показано, что разрыв полностью определяется свойствами границы конуса коэффициентов. Ранее приводились примеры с разрывом двойственности для изолированных целевых векторов. В этом случае множество целевых векторов, для которых возникает конечный разрыв, образует луч. В данной статье показано, что множество целевых векторов с разрывом может представлять собой сложные многомерные области. Таким образом, задачи с разрывом двойственности не являются экзотическим нежелательным объектом, а должны исследоваться целенаправленно.

Разрыв двойственности возникает, когда ограничения множества допустимых решений имеют следующий недостаток. При бесконечно малых возмущениях правых частей ограничений допустимое множество на некоторых направлениях начинает аномально расширяться. Это проявляется в резком изменении оптимального значения исходной задачи. Таким образом, качество ограничений, которые определяют геометрический объект в виде допустимого множества, можно считать недостаточным. Наш подход позволяет находить направления, на которых проявляется аномальное расширение геометрических объектов. Подобные явления могут возникать в различных областях техники, экономики, социологии и политики. Данный подход может использоваться также при анализе структуры незамкнутой границы выпуклых множеств в многомерных пространствах, поскольку мы с трудом можем представлять себе многомерные множества, а также строить график функций с количеством переменных более двух.

VIII. Литература

[1] Karney D.F. Duality gaps in semi-infinite linear programming – an approximation problem. *Math. Progr.*, 1981, vol. 20, no 1, pp. 129–143.

[2] Duffin R.J., Karlovitz L.A. An infinite linear program with a duality gap, *Management Sci*., 1965, vol. 12, no 1, pp. 122–134.

[3] Chernikov S.N. *Linear Inequalities*. Nauka, Moscow, 1968. 489 p. (In Russian).

[4] Jeroslow R.G. Uniform quality in semi-infinite convex optimization, *Math. Progr.* , 1983, vol. 27, no 2, pp. 144–155.

[5] Eremin I.I., Astafiev N.N. *Introduction to the Theory of Linear and Convex Programming*. Nauka, Moscow, 1976. 192 p. (In Russian).

[6] Rockafellar R.T. *Convex analysis*. Princeton, New Jersey, 1970. 260 p.

[7] Kretschmer K.S. Programmes in paired spaces, *Canad. J.Math*., 1961, vol. 13, pp. 221–238.

[8] Trofimov S.P. Kriterii razryva dvoistvennosti dlya polubeskonechnykh zadach lineinogo programmirovaniya, *Protivorechivye modeli optimizatsii: Sb. nauch.tr.*, 1987, pp. 64–70. (In Russian).